**Том 69** **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ 2024** **Выпуск 4**

# ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ НА ДЕВЯТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ[1)]

С 2 по 8 июня 2024 г. состоялась 9-я Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-9). Она (как и предыдущая МКСМ-8) проходила в поселке Дивноморское (г. Геленджик) в спортивно-оздоровительном комплексе "Радуга" Донского государственного технического университета. Организаторами нынешней конференции стали Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Математический центр мирового уровня "Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук", Региональный научно-образовательный математический центр Южного федерального университета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Национальный комитет Общества Бернулли по математической статистике, теории вероятностей, комбинаторике и их применениям и Донской государственный технический университет (ДГТУ).

Данная конференция была посвящена 300-летию Российской академии наук. В своем вступительном докладе Председатель Оргкомитета МКСМ-9 А. Н. Ширяев подробно рассказал о роли РАН в развитии российской науки и, в частности, теории вероятностей и математической статистики. Видеозаписи докладов можно найти на сайте https://www.mathnet.ru/conf2441 (см. также сайт конференции http://www.intconfstochmet.ru).

Конференция проходила в очно-дистанционном формате. Большинство докладов по различным направлениям современной теории вероятностей были проведены очно. В МКСМ-9 наряду с известными российскими учеными приняли участие представители Португалии, Германии, Израиля, Таджикистана и Узбекистана. Российские участники были представлены следующими городами: Москва, Санкт-Петербург, Ростов-на-Дону, Воронеж, Севастополь, Томск, Уфа, Нижний Новгород, Хабаровск, Челябинск, Сочи, Таганрог, Майкоп, Белгород, Великий Новгород, Калуга, Дубна. Работала специальная секция, на которой делали доклады молодые ученые: аспиранты, магистранты и студенты. Всего было сделано 26 пленарных и 42 секционных доклада.

*А. Н. Ширяев, Т. А. Волосатова, А. Н. Карапетянц, И. В. Павлов, П. А. Яськов*

[1)]Конференция проводилась при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265) и Регионального научно-образовательного математического центра Южного федерального университета (соглашение Минобрнауки № 075-02-2024-1427 от 28 февраля 2024 г.).

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5736

состояние системы в момент $\tau_i$. Математическая модель системы описывается марковской векторной последовательностью $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}),\ i = 0, 1, \ldots\}$.

**Теорема.** *Необходимым условием существования предельного распределения для цепи Маркова* $\{(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}); i = 0, 1, \ldots\}$ *является выполнение неравенств* $a_1 + n_1 > \lambda_1(T_1 + T_3 + T_4 + T_6)$, $a_2 + n_2 > \lambda_2(T_1 + T_3 + T_4 + T_6)$, *где* $a_j$ *и* $n_j$ *— максимально возможное число обслуженных требований на первом и втором этапах по потоку* $\Pi_j$, $j = 1, 2$.

**Кудрявцев О. Е.** (Российская таможенная академия, Ростов-на-Дону, Россия; ООО НПФ "ИнВайз Системс", Ростов-на-Дону, Россия)**. Меры риска переменных аннуитетов в экспоненциальных моделях Леви**[9]**.**

Руководствуясь эффективностью метода фреймовых проекций, разработанного для оценивания азиатских опционов с фиксированной ценой исполнения и дискретным мониторингом цен, мы решили распространить этот подход на вычисление показателей риска переменных аннуитетов в экспоненциальных моделях Леви. В предлагаемом подходе плотность вероятности чистых обязательств, выражаемых через конечное положение и интеграл экспоненциального процесса Леви $F'_t$, аппроксимируется с использованием теории фреймов и базисов Рисса с помощью B-сплайнов 3-го порядка.

Заменив интеграл определенной дискретной суммой, соответствующей разбиению $[0, T]$ точками $t_j = j\Delta t = jT/M$ и множеству $\mathbf{T}^* = \{t_0^*, t_1^*, \ldots, t_{M-1}^*\}$, где $t_j < t_j^* < t_{j+1}$, $j = 0, \ldots, M-1$, сведем общую численную схему к следующей теореме.

**Теорема.** *Положим* $L'_M = \sum_{j=0}^{M-1} \omega_j F'_{t_j^*} + \omega_M F'_{t_M}$, *где веса* $\omega_j$, $j = 0, \ldots, M$, *являются положительными и* $\omega_M = 1$. *Введем также* $R_M = \ln\bigl(F'_{t_M}/F'_{t^*_{M-1}}\bigr)$, $R_0 = \ln\bigl(F'_{t_0^*}/F_0\bigr)$ *и* $R_j = \ln\bigl(F'_{t_j^*}/F'_{t^*_{j-1}}\bigr)$, $j = 1, \ldots, M-1$. *Положим* $Y_M := R_M$ *и определим последовательно* $Y_j = R_j + Z_{j+1}$, $j = 1, \ldots, M-1$, $Y_0 = R_0 + Z_1$, *где* $Z_j := \ln(\omega_{j-1} + \exp(Y_j))$. *Тогда*

$$L'_M \equiv F_0 \exp(Y_0),$$

*где характеристическая функция случайной величины* $Y_0$ *может быть найдена итерационно следующим образом*:

$$\phi_{Y_M}(\xi) = \phi_{R_M}(\xi), \qquad \phi_{Z_j}(\xi) = \phi_{\ln(\omega_{j-1}+\exp(Y_j))}(\xi), \quad j = M, \ldots, 1,$$
$$\phi_{Y_j}(\xi) = \phi_{R_j}(\xi)\phi_{Z_{j+1}}(\xi), \qquad j = M-1, \ldots, 0.$$

**Кузнецов Д. Ф.** (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия)**. Разложения повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича. Случай произвольных ПОНС в** $L_2[t, T]$**.**

**Теорема 1** [1, с. 205]**.** *Пусть* $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ *— полная ортонормированная система (ПОНС) в* $L_2[t, T]$, *и пусть* $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_k(\tau) \in L_2[t, T]$. *Тогда для всех*

[9]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00474, https://rscf.ru/project/23-21-00474/.

$k \in \mathbf{N}$ *и* $i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, m$

$$\int_t^T \psi_k(t_k) \cdots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1)\, d\mathbf{W}_{t_1}^{(i_1)} \cdots d\mathbf{W}_{t_k}^{(i_k)} = \underset{p_1,\ldots,p_k \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \ldots j_1}$$

$$\times \Biggl( \prod_{l=1}^{k} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \sum_{r=1}^{[k/2]} (-1)^r \sum{}' \prod_{s=1}^{r} \mathbf{I}\{i_{g_{2s-1}} = i_{g_{2s}} \neq 0\} \mathbf{I}\{j_{g_{2s-1}} = j_{g_{2s}}\} \prod_{l=1}^{k-2r} \zeta_{j_{q_l}}^{(i_{q_l})} \Biggr),$$

*где* $\mathbf{W}_\tau^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, *— независимые стандартные винеровские процессы,* $\mathbf{W}_\tau^{(0)} = \tau$, $d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ *— дифференциал Ито,* $[x]$ *— целая часть* $x$, $\sum'$ *— сумма по всем перестановкам множества* $(\{\{g_1, g_2\}, \ldots, \{g_{2r-1}, g_{2r}\}\}, \{q_1, \ldots, q_{k-2r}\})$, *фигурные скобки означают неупорядоченное множество, а круглые — упорядоченное,* $\{g_1, g_2, \ldots, g_{2r-1}, g_{2r}, q_1, \ldots, q_{k-2r}\} = \{1, 2, \ldots, k\}$, $\prod_\varnothing := 1$, $\sum_\varnothing := 0$, $\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(\tau)\, d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ *— н.о.р.* $N(0,1)$*-с.в.* $(i \neq 0)$, $C_{j_k \ldots j_1}$ *— коэффициенты Фурье,* $K(t_1, \ldots, t_k) = \psi_1(t_1) \cdots \psi_k(t_k)\, \mathbf{I}\{t_1 < \cdots < t_k\}$, $k \geqslant 2$, *и* $K(t_1) = \psi_1(t_1)$, $t_1, \ldots, t_k \in [t, T]$, $\mathbf{I}\{A\}$ *— индикатор* $A$.

**Теорема 2** [1, разд. 2.18–2.30]**.** *Пусть* $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ *— ПОНС в* $L_2[t, T]$. *Тогда*

$$\int_t^T \psi_k(t_k) \cdots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \circ d\mathbf{W}_{t_1}^{(i_1)} \cdots \circ d\mathbf{W}_{t_k}^{(i_k)}$$

$$= \underset{p_1,\ldots,p_k \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \zeta_{j_l}^{(i_l)},$$

*где* $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau) \in L_2[t, T]$ *для* $k = 1, 2$, *а также* $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_k(\tau) \in C[t, T]$ *и* $p_1 = \cdots = p_k = p$ *для* $k = 3, 4, 5$ *или для* $k \geqslant 6$, *но при выполнении условия* (2.1302) *из* [1, с. 777] *в последнем случае,* $\circ\, d\mathbf{W}_\tau^{(i)}$ *— дифференциал Стратоновича, остальные обозначения такие же, как в теореме* 1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. F. Kuznetsov, *Strong approximation of iterated Itô and Stratonovich stochastic integrals based on generalized multiple Fourier series. Application to numerical solution of Itô SDEs and semilinear SPDEs*, 2024 (v1 – 2020), 1140 pp., arXiv: 2003.14184v53.

**Лещенко С.С.** (СУНЦ МГУ, Москва, Россия)**. Об одном типе барицентров для конечного набора вероятностных мер.**

Пусть $\mathbb{E} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathsf{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$, $\Theta = \{1, 2, \ldots, N\}$, — это статистический эксперимент. Пусть $\mathsf{R}$ — это вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$, которая доминирует $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_N$, а $p_1, \ldots, p_N$ — соответствующие производные Радона–Никодима.

Определим марковское ядро $\boldsymbol{P}$ из $(\Theta, 2^\Theta)$ в $(\Omega, \mathcal{F})$ следующим соотношением: $\boldsymbol{P}(\theta, A) = \mathsf{P}_\theta(A)$, $\theta \in \Theta$, $A \in \mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{K}$ — это класс всех выпуклых полунепрерывных снизу функций $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ таких, что $\operatorname{int}\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$.

Пусть $\pi$ и $\overline{\pi}$ — две вероятностные меры на $\Theta$. Предположим, что $\pi_i = \pi(\{i\}) > 0$ и $\overline{\pi}_i = \overline{\pi}(\{i\}) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Для статистического эксперимента $\mathbb{E}$ предлагается мера информативности, построенная с помощью $f$-дивергенции ($f \in \mathcal{K}$):

$$\mathscr{I}_{f,\pi,\overline{\pi}}(\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_N) = \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{P}(\mathcal{F})} I_f(\pi \times \boldsymbol{P}, \overline{\pi} \times \mathsf{Q}). \qquad (1)$$

Здесь $\mathscr{P}(\mathcal{F})$ — множество всех вероятностных мер.