Д.Ф.КУЗНЕЦОВ

ЗАМЕНА ПОРЯДКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ПОВТОРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛАХ ПО МАРТИНГАЛУ

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1999

УДК 519.21
Кузнецов Д.Ф. Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу. – СПб: Издательство СПбГТУ, 1999. – 11с.

В настоящей ратоте установлен класс повторных стохастических интегралов по мартингалу, для которого справедливы п.н. формулы замены порядка интегрирования, согласующиеся с правилами замены порядка интегрирования для повторных римановых интегралов. Доказана теорема о замене порядка интегрирования для указанного класса повторных стохастических интегралов. Рассмотрен ряд следствий и примеров применения этой теоремы.
Библиогр. 4 назв.

Печатается с оригинал-макета, подготовленного автором

Издание осуществлено при поддержке Министерства общего и профессионального образования РФ (грант N 97-0-1.8-71).

1 Введение

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и неубывающая совокупность $\sigma-$алгебр $\{\mathcal{F}_\tau,\ \tau \in [0,T]\}$, определеная на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Рассмотрим $\mathcal{F}_\tau$ измеримый при каждом $\tau \in [0,T]$ мартингал $\{M_\tau,\ \tau \in [0,T]\}$, для которого существует такой неотрицательный п.н. вещественнозначный случайный процесс $\{\rho_\tau,\ \tau \in [0,T]\}$, что $\mathbf{E}\left((M_s - M_t)^2 | \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}\left(\int_t^s \rho_\tau d\tau | \mathcal{F}_t\right)$ п.н., где $0 \le t \le s \le T$. Следуя работе [1] будем называть такой мартингал – D-мартингалом. В частности, стандартный винеровский процесс является D-мартингалом с $\rho_\tau = 1$ п.н.

Введем в рассмотрение класс $H(\rho, [0,T])$ измеримых по совокупности переменных (τ, ω), $\mathcal{F}_\tau$ измеримых при всех $\tau \in [0,T]$ функций $\xi_\tau \stackrel{def}{=} \xi(\tau,\omega) :\ [0,T] \times \Omega \to \Re^1$ таких, что $\mathbf{E}\int_0^T \xi_\tau^2 \rho_\tau d\tau < \infty$. Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^n$ промежутка $[t,T] \subseteq [0,T]$, которое удовлетворяет условию:

$$t = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = T,\ \max_{0 \le j \le n-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{1.1}$$

Определим стохастический интеграл по D-мартингалу следующим образом [1]:

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{n-1} \xi_{\tau_j}(M_{\tau_{j+1}} - M_{\tau_j}) \stackrel{def}{=} \int_t^T \xi_\tau dM_\tau. \tag{1.2}$$

Известно [1], что если $\xi_\tau \in H(\rho, [t,T])$, то стохастический интеграл по D-мартингалу существует. На протяжении всей работы $\{\tau_j\}_{j=0}^n$ – разбиение промежутка $[t,T]$, которое удовлетворяет условию (1.1), а $C_{[t,T]}$ – множество непрерывных на промежутке $[t,T]$ функций. Будем обозначать через $\tilde{H}(\rho, [0,T])$ класс среднеквадратически непрерывных при всех $\tau \in [0,T]$ и принадлежащих классу $H(\rho, [0,T])$ случайных функций ξ_τ.

В данной работе рассматривается следующий класс повторных стохастических интегралов:

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T} = \int_t^T \psi_1(t_1) \ldots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \phi_\tau dM_\tau^{(k+1)} dM_{t_k}^{(k)} \ldots dM_{t_1}^{(1)},$$

где $\phi_\tau \in \tilde{H}(\rho, [t,T])$; здесь и далее: $M_\tau^{(l)} = M_\tau$ либо $M_\tau^{(l)} = \tau$ при $\tau[t,T]$; M_τ – D-мартингал; $l = 1, \ldots, k+1$; $\psi^{(k)} \stackrel{def}{=} (\psi_1, \ldots, \psi_k)$, $\psi^{(1)} \stackrel{def}{=} \psi_1$. В дальнейшем интегралы $J[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T}$ будем называть повторными стохастическими интегралами по D-мартингалу.

Хорошо известно, что для повторного интеграла Римана, при определенных условиях, справедлива формула замены порядка интегрирования. В частности, если $f(x), g(x) \in C_{[a,b]}$, то

$$\int_a^b f(x) \int_a^x g(y) dy dx = \int_a^b g(y) \int_y^b f(x) dx dy. \tag{1.3}$$

Если бы для интеграла $J[\phi, \psi_1]_{t,T}$ была справедлива формула замены порядка интегрирования, аналогичная (1.3), то мы имели бы

$$J[\phi, \psi_1]_{t,T} = \int_t^T \phi_\tau \int_\tau^T \psi_1(s)\ dM_s^{(1)} dM_\tau^{(2)}. \tag{1.4}$$

Если вдобавок в (1.4) $M_s^{(1)}, M_s^{(2)} = w_s$, где w_s – $\mathcal{F}_s$ измеримый при всех $s \in [t,T]$ винеровский процесс, то случайный процесс $\eta_\tau = \phi_\tau \int_\tau^T \psi_1(\tau) dM_\tau^{(1)}$ не будет принадлежать классу $H(\rho, [t,T])$ и, следовательно, для стохастического интеграла $\int_t^T \eta_\tau dM_\tau^{(2)}$ в правой части (1.4) не будут выполнены условия его существования. В тоже время справедлива формула, известная как лемма Ито:

$$\int_t^T dw_s \int_t^T ds = \int_t^T (s-t) dw_s + \int_t^T (w_s - w_t) ds \text{ п.н.},$$

которую можно получить, например, с использованием формулы Ито, но можно рассматривать и как следствие замены порядка интегрирования. Действительно, можно показать, что

$$\int_t^T (w_s - w_t) ds = \int_t^T \int_t^s dw_\tau ds = \int_t^T \int_\tau^T ds dw_\tau \text{ п.н.}.$$

Тогда

$$\int_t^T (s-t)dw_s + \int_t^T (w_s - w_t)ds = \int_t^T \int_t^\tau dsdw_\tau + \int_t^T \int_\tau^T dsdw_\tau =$$

$$= \int_t^T dw_s \int_t^T ds \text{ п.н..}$$

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы установить строгий математический смысл формулы (1.4), а также ее аналога для повторного стохастического интеграла $J[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T};\ k \geq 2$. При этом будет использоваться более общее, чем (1.2) определение стохастического интеграла.

В [2] Стратонович ввел определение так называемого "смешанного" стохастического интеграла по винеровскому процессу для определенного класса интегрируемых процессов. Беря за основу это определение, рассмотрим следующую конструкцию стохастического интеграла:

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{\tau_j} \left(M_{\tau_{j+1}} - M_{\tau_j} \right) \theta_{\tau_{j+1}} \stackrel{def}{=} \int_t^T \phi_\tau dM_\tau \theta_\tau, \tag{1.5}$$

где $\phi_\tau, \theta_\tau \in \tilde{H}(\rho, [t,T])$. В дальнейшем, при некоторых дополнительных предположениях, будет доказано существование интегралов вида (1.5) для $\phi_\tau \in \tilde{H}(\rho, [t,T])$ и θ_τ из несколько более узкого класса процессов, чем $\tilde{H}(\rho, ([t,T])$. Кроме этого, интеграл вида (1.5) будет использоваться для формулировки и доказательства теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах $J[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T};\ k \geq 1$.

2 Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу

Определим стохастические интегралы $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{s,T};\ k \geq 1$ вида:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{s,T} = \int_s^T \psi_k(t_k) dM_{t_k}^{(k)} \ldots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dM_{t_1}^{(1)}$$

в соответствии с определением (1.5) следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{t,T} \stackrel{def}{=} \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{n-1} \psi_k(\tau_l) \Delta M_{\tau_l}^{(k)} \hat{I}[\psi^{(k-1)}]_{\tau_{l+1},T}, \tag{2.1}$$

где $k \geq 1;\ \ \hat{I}[\psi^{(0)}]_{s,T} \stackrel{def}{=} 1;\ [s,t] \subseteq [t,T]$; здесь и далее $\Delta M_{\tau_l}^{(i)} = M_{\tau_{l+1}}^{(i)} - M_{\tau_l}^{(i)};\ i = 1, \ldots, k+1;$ $l = 0,\ 1, \ldots, n-1$. Затем определим повторный стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T};\ k \geq 1$ вида:

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T} = \int_t^T \phi_s dM_s^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{s,T}$$

также в соответствии с определением (1.5):

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T} \stackrel{def}{=} \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{n-1} \phi_{\tau_l} \Delta M_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{\tau_{l+1},T}.$$

Сформулируем теорему о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу.

Теорема 1 *Пусть $\phi_\tau \in \tilde{H}(\rho, [t,T])$, $\psi_l(\tau) \in C_{[t,T]}$ $(l = 1, \ldots, k)$, процессы ϕ_τ, ρ_τ независимы, причем $\mathbf{E}\rho_\tau \leq K < \infty$. Тогда существует стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T}$ и $J[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T} = \hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T}$ п.н.*

Замечание 1 Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1 отметим, что хорошо известна конструкция стохастического интеграла по винеровскому процессу от упреждающей случайной функции - стохастический интеграл Стратоновича. Интеграл $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T}$ с одной стороны тоже является стохастическим интегралом от упреждающей случайной функции, однако в условиях теоремы 1 $J[\phi,\psi^{(k)}]_{t,T}=\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{t,T}$ п.н., а $J[\phi,\psi^{(k)}]_{t,T}$ – обычный повторный стохастический интеграл по D-мартингалу. Если, например, M_τ – винеровский процесс, то вопрос о взаимосвязи стохастического интеграла Стратоновича и стохастического интеграла $J[\phi,\psi^{(k)}]_{t,T}$ решается как стандартный вопрос о связи стохастических интегралов Стратоновича и Ито.

Замечание 2 Отметим также, что можно предложить несколько другой вариант условий теоремы 1. Так, можно не требовать независимости процессов ϕ_τ и ρ_τ, однако в этом случае необходимо потребовать, например, выполнение следующих дополнительных условий:

1. $\mathbf{E}\rho_\tau^2<\infty$ при всех $\tau\in[t,T]$;

2. процесс ϕ_τ – непрерывен в среднем степени 4 при всех $\tau\in[t,T]$.

Доказательство теоремы 1: Сначала докажем теорему при $k=1$. Имеем:

$$J[\phi,\psi_1]_{t,T}\stackrel{def}{=}\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{n-1}\psi_1(\tau_l)\Delta M_{\tau_l}^{(1)}\int_t^{\tau_l}\phi_\tau dM_\tau^{(2)}=$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{n-1}\psi_1(\tau_l)\Delta M_{\tau_l}^{(1)}\sum_{j=0}^{l-1}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\phi_\tau dM_\tau^{(2)},\tag{2.2}$$

$$\hat{J}[\phi,\psi_1]_{t,T}\stackrel{def}{=}\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j=0}^{n-1}\phi_{\tau_j}\Delta M_{\tau_j}^{(2)}\int_{\tau_{j+1}}^{T}\psi_1(s)dM_s^{(1)}=$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j=0}^{n-1}\phi_{\tau_j}\Delta M_{\tau_j}^{(2)}\sum_{l=j+1}^{n-1}\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\psi_1(s)dM_s^{(1)}=$$

$$=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{n-1}\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\psi_1(s)dM_s^{(1)}\sum_{j=0}^{l-1}\phi_{\tau_j}\Delta M_{\tau_j}^{(2)}.\tag{2.3}$$

Далее ясно, что, если разность ε_n допредельных выражений в правых частях (2.2) и (2.3) стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $n\to\infty$, то $\hat{J}[\phi,\psi_1]_{t,T}$ существует и $J[\phi,\psi_1]_{t,T}=\hat{J}[\phi,\psi_1]_{t,T}$ п.н. Эта разность ε_n представима в виде: $\varepsilon_n=\varepsilon_n'+\varepsilon_n''$, где

$$\varepsilon_n'=\sum_{l=0}^{n-1}\psi_1(\tau_l)\Delta M_{\tau_l}^{(1)}\sum_{j=0}^{l-1}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\left(\phi_\tau-\phi_{\tau_j}\right)dM_\tau^{(2)},$$

$$\varepsilon_n''=\sum_{l=0}^{n-1}\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\left(\psi_1(\tau_l)-\psi_1(s)\right)dM_s^{(1)}\sum_{j=0}^{l-1}\phi_{\tau_j}\Delta M_{\tau_j}^{(2)}.$$

Покажем, что $\text{l.i.m.}\varepsilon_n'=0$ при $n\to\infty$. Для этого рассмотрим четыре случая:

1. $dM_s^{(2)}=dM_s,\ \Delta M_{\tau_k}^{(1)}=\Delta M_{\tau_k};$
2. $dM_s^{(2)}=ds,\ \Delta M_{\tau_k}^{(1)}=\Delta M_{\tau_k};$
3. $dM_s^{(2)}=dM_s,\ \Delta M_{\tau_k}^{(1)}=\Delta\tau_k;$
4. $dM_s^{(2)}=ds,\ \Delta M_{\tau_k}^{(1)}=\Delta\tau_k.$

Для первого случая в условиях теоремы 1 с использованием свойств стохастического интеграла по D-мартингалу [1], теоремы о среднем значении и среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ получаем:

$$\mathbf{E}\left|\varepsilon_n'\right|^2\le K\sum_{k=0}^{n-1}\psi^2(\tau_k)\Delta\tau_k\sum_{j=0}^{k-1}\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\mathbf{E}\left|\phi_\tau-\phi_{\tau_j}\right|^2d\tau$$

$$\le KC\max_{0\le j\le n-1}\mathbf{E}\left|\phi_{\theta_j}-\phi_{\tau_j}\right|^2\sum_{k=0}^{N-1}\Delta\tau_k\sum_{j=0}^{k-1}\Delta\tau_j,\tag{1}$$

где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $\psi^2(\tau) \leq C < \infty$.

Аналогично для второго, третьего и четвертого случаев соответственно получаем:

$$\mathbf{E}\left|\varepsilon'_N\right|^2 \leq K \sum_{k=0}^{n-1} \psi^2(\tau_k)\Delta\tau_k \mathbf{E}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j})d\tau\right)^2$$

$$\leq K \sum_{k=0}^{n-1} \psi^2(\tau_k)\Delta\tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(\mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j})d\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\leq KC \max_{0\leq j\leq n-1} \mathbf{E}\left|\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}\right|^2 \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta\tau_j\right)^2, \tag{2}$$

$$\mathbf{E}\left|\varepsilon'_n\right|^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mid \psi(\tau_k) \mid \Delta\tau_k \left(\mathbf{E}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j})dM_\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\leq K \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mid \psi(\tau_k) \mid \Delta\tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbf{E}|\phi_\tau - \phi_{\tau_j}|d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\leq KC \max_{0\leq j\leq n-1} \mathbf{E}\left|\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}\right|^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \Delta\tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta\tau_j\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2, \tag{3}$$

$$\mathbf{E}\left|\varepsilon'_n\right|^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} \mid \psi(\tau_k) \mid \Delta\tau_k \left(\mathbf{E}\left(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j})d\tau\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$\leq C \max_{0\leq j\leq n-1} \mathbf{E}\left|\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}\right|^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta\tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta\tau_j\right)^2, \tag{4}$$

где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $\psi^2(\tau) \leq C < \infty$.

Таким образом в силу среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ и (1) - (4) следует, что $\text{l.i.m.}\varepsilon'_n = 0$ при $n \to \infty$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что $\text{l.i.m.}\varepsilon''_n = 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\text{l.i.m.}\varepsilon_n = 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана для случая $k = 1$.

Введем обозначения:

$$I[\psi_q^{(r+1)}]_{s,\theta} \stackrel{def}{=} \int_s^\theta \psi_q(t_1) \ldots \int_s^{t_r} \psi_{q+r}(t_{r+1})dM_{t_{r+1}}^{(q+r)} \ldots dM_{t_1}^{(q)},$$

$$I[\phi, \psi_q^{(r+1)}]_{s,\theta} \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \int_s^\theta \psi_q(t_1) \ldots \int_s^{t_r} \psi_{q+r}(t_{r+1}) \int_s^{t_{r+1}} \phi_\tau dM_\tau^{(q+r+1)} dM_{t_{r+1}}^{(q+r)} \ldots dM_{t_1}^{(q)},$$

$$G[\psi_q^{(r+1)}]_{m,n} = \sum_{j_q=m}^{n-1} \sum_{j_{q+1}=m}^{j_q-1} \ldots \sum_{j_{q+r}=m}^{j_{q+r-1}-1} \prod_{l=q}^{r+q} I[\psi_l]_{\tau_{j_l},\tau_{j_l+1}},$$

где $\psi_q^{(r+1)} \stackrel{def}{=} (\psi_q, \ldots, \psi_{q+r})$; $\psi_q^{(1)} \stackrel{def}{=} \psi_q$; $\psi_1^{(r+1)} \stackrel{def}{=} \psi^{(r+1)} = (\psi_1, \ldots, \psi_{r+1})$.

Для доказательства теоремы при $k>1$ достаточно показать, что

$$J[\phi,\psi^{(k)}]_{t,T}=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ S[\phi,\psi^{(k)}]_n=\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{t,T}\ \text{п.н.},\tag{2.4}$$

где

$$S[\phi,\psi^{(k)}]_k=G[\psi^{(k)}]_{0,n}\sum_{l=0}^{j_k-1}\phi_{\tau_l}\Delta M_{\tau_l}^{(k+1)}.$$

Докажем сначала правое равенство в (2.4). Имеем:

$$\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{t,T}\stackrel{def}{=}\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{n-1}\phi_{\tau_l}\Delta M_{\tau_l}^{(k+1)}\hat{I}[\psi^{(k)}]_{\tau_{l+1},T}.\tag{2.5}$$

Из предположения индукции следует, что

$$I[\psi^{(k)}]_{\tau_{l+1},T}=\hat{I}[\psi^{(k)}]_{\tau_{l+1},T}\ \text{п.н.},\tag{2.6}$$

где $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{s,T}$ определен в соответствии с (2.1) и

$$I[\psi^{(k)}]_{s,T}=\int_s^T\psi_1(t_1)\ldots\int_s^{t_{k-1}}\psi_k(t_k)dM_{t_k}^{(k)}\ldots dM_{t_1}^{(1)}.$$

Заметим, что при $k\ge 4$ (при $k=2,3$ рассуждения аналогичны):

$$\begin{aligned}I[\psi^{(k)}]_{\tau_{l+1},T}&=\sum_{j_1=l+1}^{n-1}\int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\psi_1(t_1)\int_{\tau_{l+1}}^{t_1}\psi_2(t_2)I[\psi_3^{(k-2)}]_{\tau_{l+1},t_2}dM_{t_2}^{(2)}dM_{t_1}^{(1)}\\&=\sum_{j_1=l+1}^{n-1}\int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\psi_1(t_1)\left(\sum_{j_2=l+1}^{j_1-1}\int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}+\int_{\tau_{j_1}}^{t_1}\right)\psi_2(t_2)I[\psi_3^{(k-2)}]_{\tau_{l+1},t_2}dM_{t_2}^{(2)}dM_{t_1}^{(1)}\\&=\ldots=G[\psi^{(k)}]_{l+1,n}+H[\psi^{(k)}]_{l+1,n},\end{aligned}\tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}H[\psi^{(k)}]_{l+1,n}=&\sum_{j_1=l+1}^{n-1}\int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\psi_1(s)\int_{\tau_{j_1}}^{s}\psi_2(\tau)I[\psi_3^{(k-2)}]_{\tau_{l+1},\tau}dM_{\tau}^{(2)}dM_s^{(1)}\\&+\sum_{r=2}^{k-2}G[\psi^{(r-1)}]_{l+1,n}\times\\&\times\sum_{j_r=l+1}^{j_{r-1}-1}\int_{\tau_{j_r}}^{\tau_{j_r+1}}\psi_r(s)\int_{\tau_{j_r}}^{s}\psi_{r+1}(\tau)I[\psi_{r+2}^{(k-r-1)}]_{\tau_{l+1},\tau}dM_{\tau}^{(r+1)}dM_s^{(r)}\\&+G[\psi^{(k-2)}]_{l+1,n}\sum_{j_{k-1}=l+1}^{j_{k-2}-1}I[\psi_{k-1}^{(2)}]_{\tau_{j_{k-1}},\tau_{j_{k-1}+1}}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Подставим (2.7) в (2.6), а (2.6) в (2.5). Тогда

$$\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{t,T}=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{n-1}\phi_{\tau_l}\Delta M_{\tau_l}^{(k+1)}\left(G[\psi^{(k)}]_{l+1,n}+H[\psi^{(k)}]_{l+1,n}\right).\tag{2.9}$$

Поскольку

$$\sum_{j_1=0}^{n-1}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}a_{j_1\ldots j_k}=\sum_{j_k=0}^{n-1}\sum_{j_{k-1}=j_k+1}^{n-1}\ldots\sum_{j_1=j_2+1}^{n-1}a_{j_1\ldots j_k},\tag{2.10}$$

где $a_{j_1\ldots j_k}$ – скаляры, то согласно (2.10) имеем:

$$G[\psi^{(k)}]_{l+1,n}=\sum_{j_k=l+1}^{n-1}\ldots\sum_{j_1=j_2+1}^{n-1}\prod_{l=1}^{k}I[\psi_l]_{\tau_{j_l},\tau_{j_l+1}}.\tag{2.11}$$

Подставим (2.11) в $\sum\limits_{l=0}^{n-1}\phi_{\tau_l}\Delta M_{\tau_l}^{(k+1)}G[\psi^{(k)}]_{l+1,n}$ и снова воспользуемся формулой (2.10). Тогда

$$\sum_{l=0}^{n-1}\phi_{\tau_l}\Delta M_{\tau_l}^{(k+1)}G[\psi^{(k)}]_{l+1,n} = S[\phi,\psi^{(k)}]_n. \tag{2.12}$$

Предположим, что предел $\text{l.i.m.}S[\phi,\psi^{(k)}]_n$ при $n\to\infty$ существует (его существование будет доказано ниже). Тогда из (2.12) и (2.9) следует, что для доказательства правого равенства в (2.4) остается показать, что

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{n-1}\phi_{\tau_l}\Delta M_{\tau_l}^{(k+1)}H[\psi^{(k)}]_{l+1,n} = 0 \text{ п.н.}. \tag{2.13}$$

Оценивая второй момент допредельного выражения в левой части (2.13) с учетом (2.8), независимости ϕ_{τ_l}, $\Delta M_{\tau_l}^{(k+1)}$, $H[\psi^{(k)}]_{l+1,n}$, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов [1] и неравенства Минковского, убеждаемся, что (2.13) справедливо. Таким образом, в предположении о существовании предела $\text{l.i.m.}S[\phi,\psi^{(k)}]_n$ при $n\to\infty$, мы получили, что правое равенство в (2.4) справедливо. Покажем теперь, что справедливо левое равенство в (2.4). Имеем

$$J[\phi,\psi^{(k)}]_{t,T} \stackrel{def}{=} \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{n-1}\psi_1(\tau_l)\Delta M_{\tau_l}^{(1)}J[\phi,\psi_2^{(k-1)}]_{t,\tau_l}. \tag{2.14}$$

Применим теперь к интегралу $J[\phi,\psi_2^{(k-1)}]_{t,\tau_l}$ в (2.14) теже рассуждения, что и к интегралу $I[\psi^{(k)}]_{\tau_{l+1},T}$, которые привели к соотношению (2.7) и подставим получившееся в результате выражение для $I[\phi,\psi_2^{(k-1)}]_{t,\tau_l}$ в (2.14). Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов [1] нетрудно показать, что:

$$J[\phi,\psi^{(k)}]_{t,T} = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ R[\phi,\psi^{(k)}]_n \text{ п.н.}, \tag{2.15}$$

где

$$R[\phi,\psi^{(k)}]_n = \sum_{j_1=0}^{n-1}\psi_1(\tau_{j_1})\Delta M_{\tau_{j_1}}^{(1)}G[\psi_2^{(k-1)}]_{0,j_1}\sum_{l=0}^{j_k-1}\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\phi_\tau dM_\tau^{(k+1)}.$$

Покажем, что:

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ R[\phi,\psi^{(k)}]_n = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ S[\phi,\psi^{(k)}]_n. \text{ п.н.}. \tag{2.16}$$

Нетрудно видеть, что

$$R[\phi,\psi^{(k)}]_n = U[\phi,\psi^{(k)}]_n + V[\phi,\psi^{(k)}]_n + S[\phi,\psi^{(k)}]_n, \tag{2.17}$$

где

$$U[\phi,\psi^{(k)}]_n = \sum_{j_1=0}^{n-1}\psi_1(\tau_{j_1})\Delta M_{\tau_{j_1}}^{(1)}G[\psi_2^{(k-1)}]_{0,j_1}\sum_{l=0}^{j_k-1}I[\Delta\phi]_{\tau_l,\tau_{l+1}},$$

$$V[\phi,\psi^{(k)}]_n = \sum_{j_1=0}^{n-1}I[\Delta\psi_1]_{\tau_{j_1},\tau_{j_1+1}}G[\psi_2^{(k-1)}]_{0,j_1}\sum_{l=0}^{j_k-1}\phi_{\tau_l}\Delta M_{\tau_l}^{(k+1)}$$

и

$$I[\Delta\psi_1]_{\tau_{j_1},\tau_{j_1+1}} = \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}(\psi_1(\tau_{j_1})-\psi_1(\tau))dM_\tau^{(1)},$$

$$I[\Delta\phi]_{\tau_l,\tau_{l+1}} = \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}(\phi_\tau-\phi_{\tau_l})dM_\tau^{(k+1)}.$$

Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов [1], а также условий $\psi_1(\tau)\in C_{[t,T]}$, $\phi_\tau\in\tilde{H}(\rho,[t,T])$ убеждаемся, что: $\text{l.i.m.}V[\phi,\psi^{(k)}]_n = \text{l.i.m.}U[\phi,\psi^{(k)}]_n = 0$ п.н. при $n\to\infty$. Тогда учитывая (2.17) получим (2.16).

Из (2.16) и (2.15) следует левое равенство в (2.4). При этом предел $\text{l.i.m.}S[\phi, \psi^{(k)}]_n$ при $n \to \infty$ существует, поскольку он равен интегралу $J[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T}$, который существует в условиях настоящей теоремы. Таким образом цепочка равенств (2.4) доказана. Теорема доказана.

Замечание 3 Следует отметить, что если в стохастических интегралах, входящих повторный стохастический интеграл $J[\phi, \psi^{(k)}]_{t,T}$, интегрирование ведется по независимым D-мартингалам, удовлетворяющим условиям теоремы 1, или времени, то очевидно утверждение теоремы 1 также будет сохранять силу.

3 Некоторые обобщения и следствия теоремы 1

Пусть $\mathcal{D}_k = \{(t_1, \ldots, t_k): \ t \le t_1 < \ldots < t_k \le T\}$ и выполнены следующие условия:

AI. $\xi_t \in \tilde{H}(\rho, [t,T])$;

AII. $\Phi(t_1, \ldots, t_k) : \mathcal{D}_{k-1} \times \Re^1 \to \Re^1$ – непрерывная по первым $k-1$-й переменной в области $\mathcal{D}_{k-1}$ неслучайная функция, причем $\forall \tau, \theta \in \Re^1$ и $\forall (t_1, \ldots, t_{k-1}) \in \mathcal{D}_{k-1}$ существует такая постоянная $K < \infty$, что: $|\Phi(t_1, \ldots, t_{k-1}, \tau) - \Phi(t_1, \ldots, t_{k-1}, \theta)| \le K|\tau - \theta|$.

В условиях AI,AII определим следующие интегралы:

$$\hat{J}[\Phi]_{t,T}^{(k)} \stackrel{def}{=} \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{n-1} \Delta M_{\tau_{j_1}}^{(1)} \int_{\tau_{j_1+1}}^{T} dM_{t_2}^{(2)} \ldots$$

$$\ldots \int_{t_{k-2}}^{T} dM_{t_{k-1}}^{(k-1)} \int_{t_{k-1}}^{T} \Phi(\tau_{j_1}, t_2, \ldots, t_{k-1}, \xi_{t_k}) dM_{t_k}^{(k)} \ (k \ge 2).$$

Обозначим

$$J[\Phi]_{t,T}^{(k)} = \int_t^T \ldots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \ldots, t_{k-1}, \xi_{t_k}) dM_{t_1}^{(i_1)} \ldots dM_{t_k}^{(i_k)}, \tag{2.18}$$

где правая часть (2.18) понимается как повторный стохастический интеграл по D-мартингалу. Рассмотрим одно из обобщений теоремы 1.

Теорема 2 *Пусть выполнены условия* AI,AII. *Тогда существует интеграл* $\hat{J}[\Phi]_{t,T}^{(k)}$ *и* $J[\Phi]_{t,T}^{(k)} = \hat{J}[\Phi]_{t,T}^{(k)}$ *п.н.* $(k \ge 2)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 3 *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* $h(\tau) \in C_{[t,T]}$. *Тогда*

$$\int_t^T \phi_\tau dM_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{I}[\psi^{(k)}]_{\tau,T} = \int_t^T \phi_\tau h(\tau) dM_\tau^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{\tau,T} \ \textit{п.н.} \tag{2.19}$$

и интегралы в левой и правой частях (2.19) существуют.

Доказательство: Согласно теореме 1, повторный стохастический интеграл в правой части (2.19) существует. Кроме этого

$$\int_t^T \phi_\tau h(\tau) dM_\tau^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{\tau,T} = \int_t^T \phi_\tau dM_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{I}[\psi^{(k)}]_{\tau,T} -$$

$$-\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_{\tau_j} \Delta h(\tau_j) \Delta M_{\tau_j}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{\tau_{j+1},T} \ \text{п.н.},$$

где $\Delta h(\tau_j) = h(\tau_{j+1}) - h(\tau_j)$. Используя рассуждения, которые привели к правому равенству в (2.4) получаем:

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{n-1} \phi_{\tau_l} \Delta h(\tau_l) \Delta M_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{\tau_{l+1},T} =$$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \ G[\psi^{(k)}]_{0,n} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta h(\tau_l) \Delta M_{\tau_l}^{(k+1)} \ \text{п.н.}. \tag{2.20}$$

Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов [1] и непрерывности функции $h(\tau)$ получаем, что второй момент допредельного выражения в правой части (2.20) стремится к нулю при $n\to\infty$. Теорема доказана.

Рассмотрим одно из следствий теоремы 1.

Теорема 4 *В условиях теремы 3*

$$\int_t^T g(t_1)\int_t^{t_1}\phi_\tau dM_\tau^{(k+2)}dM_{t_1}^{(k+1)}\hat{I}[\psi^{(k)}]_{t_1,T}=$$

$$=\int_t^T \phi_\tau dM_\tau^{(k+2)}\int_\tau^T h(t_1)dM_{t_1}^{(k+1)}\hat{I}[\psi^{(k)}]_{t_1,T}\ \text{п.н.},\tag{2.21}$$

причем левая и правая части (2.21) существуют.

Доказательство: Применяя дважды теорему 1 получим:

$$\int_t^T \phi_\tau dM_\tau^{(k+2)}\int_\tau^T h(t_1)dM_{t_1}^{(k+1)}\hat{I}[\psi^{(k)}]_{t_1,T}$$

$$=\int_t^T\psi_1(t_1)\ldots\int_t^{t_{k-1}}\psi_k(t_k)\int_t^{t_k}\rho_\tau dM_\tau^{(k+1)}dM_{t_k}^{(k)}\ldots dM_{t_1}^{(1)}$$

$$=\int_t^T\rho_\tau dM_\tau^{(k+1)}\int_\tau^T\psi_k(t_k)dM_{t_k}^{(k)}\ldots\int_{t_2}^T\psi_1(t_1)dM_{t_1}^{(1)}\ \text{п.н.},$$

где $\mu_\tau\stackrel{def}{=}h(\tau)\int_t^\tau\phi_s dM_s^{(k+2)}$. Теорема доказана.

Приведем ряд справедливых п.н. формул, являющихся следствием теоремы 1:

$$J_{(10)t,T}=\int_t^T(T-t_1)dM_{t_1},$$

$$J_{(10)T,t}+J_{(01)T,t}=(T-t)J_{(1)T,t},$$

$$J_{(100)T,t}=\frac{1}{2}\int_t^T(T-t_1)^2dM_{t_1},\ J_{(010)T,t}=\int_t^T(t_1-t)(T-t_1)dM_{t_1},$$

$$J_{(1010)T,t}=\int_t^T(T-t_2)^2\int_t^{t_2}(t_2-t_1)dM_{t_1}dM_{t_2},$$

$$J_{(1000)T,t}=\frac{1}{3!}\int_t^T(T-t_1)^3dM_{t_1},\ J_{(1\underbrace{0\ldots0}_{k-1})T,t}=\frac{1}{(k-1)!}\int_t^T(T-t_1)^{k-1}dM_{t_1},$$

$$J_{(11\underbrace{0\ldots0}_{k-2})T,t}=\frac{1}{(k-2)!}\int_t^T(T-t_2)^{k-2}\int_t^{t_2}dM_{t_1}dM_{t_2},$$

$$J_{(\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0)T,t}=\int_t^T(T-t_1)J_{(\underbrace{1\ldots1}_{k-2})t_1,t}dM_{t_1},$$

$$J_{(1\underbrace{0\ldots0}_{k-2}1)T,t}=\frac{1}{(k-2)!}\int_t^T\int_t^{t_2}(t_2-t_1)^{k-2}dM_{t_1}dM_{t_2},$$

$$J_{(10\underbrace{1\ldots1}_{k-2})T,t}=\int_t^T\ldots\int_t^{t_3}\int_t^{t_2}(t_2-t_1)dM_{t_1}dM_{t_2}\ldots dM_{t_{k-1}},$$

$$J_{(\underbrace{1\ldots1}_{k-2}01)T,t}=\int_t^T\int_t^{t_{k-1}}(t_{k-1}-t_{k-2})\int_t^{t_{k-2}}\ldots\int_t^{t_2}dM_{t_1}\ldots dM_{t_{k-3}}dM_{t_{k-2}}dM_{t_{k-1}},$$

$$J_{(110)T,t}+J_{(101)T,t}+J_{(011)T,t}=(T-t)J_{(11)T,t},$$

$$J_{(001)T,t}+J_{(010)T,t}+J_{(100)T,t}=\frac{(T-t)^2}{2}J_{(1)T,t},$$

$$J_{(1100)T,t}+J_{(1010)T,t}+J_{(1001)T,t}+J_{(0110)T,t}+$$
$$+J_{(0101)T,t}+J_{(0011)T,t}=\frac{(T-t)^2}{2}J_{(11)T,t},$$
$$J_{(1000)T,t}+J_{(0100)T,t}+J_{(0010)T,t}+J_{(0001)T,t}=\frac{(T-t)^3}{3!}J_{(1)T,t},$$
$$J_{(1110)T,t}+J_{(1101)T,t}+J_{(1011)T,t}+J_{(0111)T,t}=(T-t)J_{(111)T,t},$$
$$\sum_{l=1}^{k}J_{(\underbrace{0\ldots0}_{l-1}1\underbrace{0\ldots0}_{k-l})T,t}=\frac{1}{(k-1)!}(T-t)^{k-1}J_{(1)T,t},$$
$$\sum_{l=1}^{k}J_{(\underbrace{1\ldots1}_{l-1}0\underbrace{1\ldots1}_{k-l})T,t}=(T-t)J_{(\underbrace{1\ldots1}_{k-1})T,t},$$
$$\sum_{\substack{l_1+\ldots+l_k=m\\ l_i\in\{0,\ 1\};\ i=1,\ldots,k}}J_{(l_1\ldots l_k)T,t}=\frac{(T-t)^{k-m}}{(k-m)!}J_{(\underbrace{1\ldots1}_{m})T,t},$$
где введены обозначения:
$$J_{(l_1\ldots l_k)T,t}=\int_t^T\ldots\int_t^{t_2}dM_{t_1}^{(1)}\ldots dM_{t_k}^{(k)},$$
$l_i=1$ при $M_{t_i}^{(i)}=M_{t_i}$ и $l_i=0$ при $M_{t_i}^{(i)}=t_i$; $i=1,\ldots,k$; M_τ – D-мартингал.

В заключение отметим, что приведенные формулы, например, когда M_τ – винеровский процесс, могут быть получены и с помощью формулы Ито. Однако при этом вывод данных формул будет несколько сложнее. Это по-видимому связано с тем, что замена порядка интегрирования является естественной операцией, осуществляемой над повторными стохастическими интегралами.

Литература

[1] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова Думка, 1968, 354с.

[2] *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М: Изд-во МГУ, 1966, 320с.

[3] *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. М.: Наука, 1963, 860с.

[4] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Том 3. М.: Наука, 1975, 496с.

Лицензия ЛР № 020593 от 7.08.97

Подписано в печать 19.10.99. Объем в п. л. 1,5.
Тираж 50. Заказ № 583.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства СПбГТУ
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29